

3. cvičení - výsledky

Příklad 1.

- (a) $\frac{x^3+x^2+4x}{2(x-1)(x+1)^2\sqrt{x^3-1}}$
- (b) $-\tan(e^x) \cdot e^x$
- (c) $6 \cdot (\cos(2x) - e^{2x})^{-4} \cdot (\sin(2x) + e^{2x})$
- (d) $\frac{\log(x^3-2x+1)}{x\sqrt{x^2-1}} + \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{3x^2-2}{(x^3-2x+1)}$

Příklad 2.

- (a) $f'_x(x, y) = 6xy + 35, [x, y] \in \mathbb{R}^2$
 $f'_y(x, y) = -8y + 3x^2, [x, y] \in \mathbb{R}^2$
- (b) $f'_x(x, y) = -\frac{\sin y^2}{x^2}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$
 $f'_y(x, y) = \frac{2y \cos y^2}{x}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$
- (c) $f'_x(x, y) = ye^{xy} + \cos(x+y), [x, y] \in \mathbb{R}^2$
 $f'_y(x, y) = xe^{xy} + \cos(x+y), [x, y] \in \mathbb{R}^2$
- (d) $f'_x(x, y) = \tan \frac{x}{y} + \frac{x}{y \cos^2 \frac{x}{y}}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, \frac{x}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
 $f'_y(x, y) = \frac{-x^2}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, \frac{x}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- (e) $f'_x(x, y) = yx^{y-1}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
 $f'_y(x, y) = x^y \log x, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
- (f) $f'_x(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}$
 $f'_y(x, y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}$
- (g) $f'_x(x, y) = |y| \cdot \operatorname{sign} x, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$
Dále $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 1$ a zbylé derivace neexistují.
 $f'_y(x, y) = |x| \cdot \operatorname{sign} y, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$
Dále $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ a zbylé derivace neexistují.
- (h) Pre $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$
 $f'_x(x, y, z) = yz + \log(z)$
 $f'_y(x, y, z) = xz + z^2$
 $f'_z(x, y, z) = xy + \frac{x}{z} + 2xz$

$$(i) \quad f'_x(x, y) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} \log(x^2 + y^2) + 2x \frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{x^2+y^2}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x^2\}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} \log(x^2 + y^2) + 2y \frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{x^2+y^2}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x^2\}$$

Dále pokud $x^2 + x^4 \neq 1$, pak parciální derivace neexistují v bodě $(x, -x^2)$.

Pokud $x^2 + x^4 = 1$, pak $f'_x(x, -x^2) = f'_y(x, -x^2) = 0$

$$(j) \quad f'_x(x, y) = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}} \cdot \frac{2x+y}{(x^2+xy+y^2)^2}, [x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$$

$$f'_y(x, y) = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}} \cdot \frac{x+2y}{(x^2+xy+y^2)^2}, [x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$$

$$\text{A } f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$$

Příklad 3.

(a) $D_f = \mathbb{R}^2$ a funkce je na něm spojitá. Pro $x, y \neq 0$ dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y \cdot \text{sign}(xy)}{2\sqrt{|xy|}} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x \cdot \text{sign}(xy)}{2\sqrt{|xy|}}.$$

Dále $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Potom $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ neexistuje pro $x \neq 0$. Analogicky $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ neexistuje pro $y \neq 0$. Parciální derivace jsou spojitě na nějakém okolí bodu $[1, -2]$, tečná rovina má tedy smysl a má rovnici $T(x, y) = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(y+2)$.

(b) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \in [-1, 0] \vee (x \in (0, 1] \wedge y \in (-\infty, -\sqrt{\arcsin x}) \cup (\sqrt{\arcsin x}, +\infty))\}$, funkce je na něm spojitá. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-1}{2\sqrt{y^2 - \arcsin x} \sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1), y^2 > \arcsin x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{y^2 - \arcsin x}}, \quad x \in [-1, 1], y^2 > \arcsin x.$$

Parciální derivaci podle x nemá smysl počítat ve vynechaných bodech (definiční obor neobsahuje vodorovnou úsečku kolem nich), podobně parciální derivaci podle y nemá smysl počítat ve vynechaných bodech až na počátek. Zde dostaneme, že $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ neexistuje. Obě derivace jsou spojitě alespoň na nějakém okolí bodu $[0, 1]$. Pro tečnou rovinu dostaneme $T(x, y) = y - \frac{x}{2}$.

(c) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \leq y^2\}$ a f je zde spojitá. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{y^6 - x^3}}, \quad x < y^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3y^5}{\sqrt{y^6 - x^3}}, \quad x < y^2.$$

Z vynechaných bodů má smysl zkoumat pouze derivaci podle proměnné y v počátku, zbylé parciální derivace nemá smysl počítat, neboť funkce není definována na žádné úsečce příslušného směru. Vyjde $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Díky spojitosti parciálních derivací na okolí bodu $[0,2]$ má smysl zkoumat tečnou rovinu, vyjde $T(x,y) = 8 + 12(y-2)$.

- (d) Definičním oborem je celá rovina a funkce je zde spojitá. Dostaneme $f'_x = \sin x, y > \cos x$ a 0 pro $y < \cos x$; $f'_y = 1, y > \cos x$ a 0 pro $y < \cos x$. V bodech $[k\pi, \cos k\pi], k \in \mathbb{Z}$ je $f'_x = 0$. V ostatních bodech parciální derivace neexistují. Díky spojitosti parciálních derivací na okolí bodu $[0, \pi]$ má smysl zkoumat tečnou rovinu, vyjde $T(x,y) = y - 1$.
- (e) Definičním oborem je celá rovina a funkce je zde spojitá. Dostaneme $f'_x = 1, y > x^3 - x$ a $3x^2$ pro $y < x^3 - x$; $f'_y = 1, y > x^3 - x$ a 0 pro $y < x^3 - x$. Pro $x = \pm\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ existuje f'_x v bodě $[x, x^3 - x]$ a rovná se 1 . Parciální derivace ve zbylých bodech neexistují.

Příklad 4. (a) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -1 + \cos y \leq x \leq 1 + \cos y\}$ a f je zde spojitá. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - (x - \cos y)^2}}, -1 + \cos y < x < 1 + \cos y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-\sin y}{\sqrt{1 - (x - \cos y)^2}}, -1 + \cos y < x < 1 + \cos y.$$

Parciální derivaci dle x nemá ve vynechaných bodech smysl počítat, neboť definiční obor neobsahuje vodorovnou úsečku kolem těchto bodů. Podobně nemá smysl počítat derivaci dle y (svislé úsečky) s výjimkou bodů $[0, k\pi], k \in \mathbb{Z}$. Zjistíme, že $\frac{\partial f}{\partial y}(0, k\pi)$ neexistuje. Alespoň na nějakém okolí bodu $[1, 0]$ jsou parciální derivace spojitě, pro tečnou rovinu dostaneme $T(x, y) = \frac{\pi}{2} - (x - 1)$.

- (b) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \in (0, 1) \vee (0 \geq x \wedge y \in (-\infty, \sqrt[3]{x}) \cup (-\sqrt[3]{x}, +\infty))\}$ a f je zde spojitá. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-|y| - 1}{3\sqrt[3]{x^2}(1 - \sqrt[3]{x})(|y| + \sqrt[3]{x})}, [x, y] \in D_f, x \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-\text{sign } y}{|y| + \sqrt[3]{y}}, [x, y] \in D_f, y \neq 0.$$

Derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ pro $x \in (0, 1)$ neexistují. Alespoň na nějakém okolí bodu $[-1, 3]$ jsou parciální derivace spojitě, pro tečnou rovinu dostaneme $T(x, y) = -\frac{1}{3}(x + 1) - \frac{1}{2}(y - 3)$.

(c) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| + 2|y| < 3\}$ a funkce je zde spojitá. Dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{-e^{|x|+2|y|} \cdot \text{sign } x}{e^3 - e^{|x|+2|y|}}, \quad [x, y] \in D_f, x \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{-e^{|x|+2|y|} \cdot 2 \text{sign } y}{e^3 - e^{|x|+2|y|}}, \quad [x, y] \in D_f, y \neq 0.\end{aligned}$$

Dále derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ pro $y \in (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ pro $x \in (-3, 3)$ neexistují. Alespoň na nějakém okolí bodu $[1, \frac{1}{2}]$ jsou parciální derivace spojité. Pro tečnou rovinu dostaneme $T(x, y) = \log(e^3 - e^2) - \frac{1}{e-1}(x - 1) - \frac{1}{e-1}(y - \frac{1}{2})$.

Příklad 5.

(a) $f'_x(x, y) = -\frac{y}{x^2 - y^2}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: -x < y < x \vee x < y < -x\}$
 $f'_y(x, y) = \frac{x}{x^2 - y^2}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: -x < y < x \vee x < y < -x\}$

(b) $f'_x(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x \neq y\}$
 $f'_y(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x \neq y\}$

(c) $f'_x(x, y) = y \cdot \text{sign } x, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x \neq 0\}$, dále $f'_x(0, 0) = 0$ a f'_x neexistuje pro $x = 0, y \neq 0$
 $f'_y(x, y) = |x|, [x, y] \in \mathbb{R}^2$

(d) $f'_x(x, y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x \neq 0\}$
 $f'_y(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: y \neq 0\}$

Dále $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ a zbylé derivace neexistují.

(e) Pre $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > \sin(x)\}$ máme:
 $f'_x(x, y) = -\cos(x)$
 $f'_y(x, y) = 1$

Pre $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y < \sin(x)\}$ máme:
 $f'_x(x, y) = \cos(x)$
 $f'_y(x, y) = -1$

Nakoniec pre $x \in \{\pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$
 $f'_x(x, \sin(x)) = 0$

(f) $f'_x(x, y, z) = \frac{z}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^3: xy > 0\}$
 $f'_y(x, y, z) = -\frac{xz}{y^2} \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^3: xy > 0\}$
 $f'_z(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z \log \frac{x}{y}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^3: xy > 0\}$

$$\begin{aligned}
(g) \quad f'_x(x, y, z) &= \frac{y}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}-1}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^3: x > 0, z \neq 0\} \\
f'_y(x, y, z) &= x^{\frac{y}{z}} \cdot \frac{\log x}{z}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^3: x > 0, z \neq 0\} \\
f'_z(x, y, z) &= -x^{\frac{y}{z}} \cdot \frac{y \log x}{z^2}, \{[x, y] \in \mathbb{R}^3: x > 0, z \neq 0\}
\end{aligned}$$

Příklad 6.

- (a) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (y > 0 \wedge y \geq \sin x) \vee (y < 0 \wedge y \leq \sin x)\}$ a funkce je zde spojitá. Pro body $[x, y]$ splňující, že $y > 0$ a $y > \sin x$ či $y < 0$ a $y < \sin x$, dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\cos x}{2y} \sqrt{\frac{y}{y - \sin x}} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\sin x}{y^2} \sqrt{\frac{y}{y - \sin x}}.$$

Derivaci podle proměnné x má smysl počítat pouze v bodech $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1]$ a $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -1]$ pro $k \in \mathbb{Z}$. V ostatních bodech nemá smysl počítat derivaci ani podle x , ani podle y , protože definiční obor neobsahuje úsečky kolem těchto bodů. Dostaneme, že $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1)$ a $\frac{\partial f}{\partial x}(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -1)$ neexistují. Díky spojitosti parciálních derivací na okolí bodu $[0, 5]$ má smysl zkoumat tečnou rovinu, její předpis je $T(x, y) = 1 - \frac{1}{10}x$.

- (b) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y > -3x\}$ a funkce je zde spojitá. Pro $y \neq \frac{2}{3}x$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= f(x, y) \left(\frac{3|2x - 3y|}{3x + y} + 2 \operatorname{sign}(2x - 3y) \log(3x + y) \right) \quad \text{a} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= f(x, y) \left(\frac{|2x - 3y|}{3x + y} - 3 \operatorname{sign}(2x - 3y) \log(3x + y) \right).
\end{aligned}$$

V bodě $[\frac{3}{11}, \frac{2}{11}]$ jsou obě parciální derivace nulové. Ve zbylých bodech parciální derivace neexistují.

- (c) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 2y\}$ a funkce je zde spojitá. Pro $y \neq 2x$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= f(x, y) \left(\frac{|2x - y|}{x - 2y} + 2 \operatorname{sign}(2x - y) \log(x - 2y) \right) \quad \text{a} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= f(x, y) \left(-\frac{2|2x - y|}{x - 2y} - \operatorname{sign}(2x - y) \log(x - 2y) \right).
\end{aligned}$$

V bodě $[-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}]$ jsou obě parciální derivace nulové. Ve zbylých bodech parciální derivace neexistují.

- (d) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -(x+1)^2 \leq y \leq x^2 + 1\}$ a f je zde spojitá. Pro body

$[x, y]$ splňující $-(x+1)^2 < y < x^2 + 1$ dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{x^2+x+1}\right)^2}} \cdot \frac{-x^2 + 1 - 2xy - y}{(x^2 + x + 1)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{x^2+x+1}\right)^2}} \cdot \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Derivaci podle y nemá ve vynechaných bodech smysl počítat, neboť definiční obor neobsahuje svislou úsečku kolem těchto bodů. Derivaci podle x má smysl počítat pouze v bodech $[0, 1], [-1, 0]$ (v ostatních chybí vodorovná úsečka). Derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1), \frac{\partial f}{\partial x}(-1, 0)$ neexistují. Díky spojitosti derivací na okolí bodu $[1, -1]$ můžeme najít tečnou rovinu a ta má tvar $T(x, y) = \frac{1}{3}(x + y)$.

- (e) Definičním oborem je celá rovina a funkce je zde spojitá. Standardně obdržíme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \cdot \text{sign}(x^2 + y^2 - 1) \cos |x^2 + y^2 - 1|, x^2 + y^2 \neq 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \cdot \text{sign}(x^2 + y^2 - 1) \cos |x^2 + y^2 - 1|, x^2 + y^2 \neq 1.$$

Lze spočítat, že $f'_x(0, \pm 1) = f'_y(\pm 1, 0) = 0$. Derivace ve zbylých bodech neexistují.

- (f) Definičním oborem je celá rovina a funkce je zde spojitá. Standardně obdržíme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x \cdot \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2 - 1}}{3 \sqrt[3]{(x^2 + y^2 - 1)^2}}, x^2 + y^2 \neq 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y \cdot \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2 - 1}}{3 \sqrt[3]{(x^2 + y^2 - 1)^2}}, x^2 + y^2 \neq 1.$$

Parciální derivace v bodech splňujících $x^2 + y^2 = 1$ neexistují.

- (g) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \geq 1\}$ a funkce je zde spojitá. Standardně obdržíme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\text{sign } x}{2\sqrt{|x| + |y| - 1}}, |x| + |y| > 1 \wedge x \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\text{sign } y}{2\sqrt{|x| + |y| - 1}}, |x| + |y| > 1 \wedge y \neq 0.$$

Funkce $f'_x(0, y), f'_y(x, 0)$ neexistují pro $|y| \geq 1, |x| \geq 1$. Derivace ve zbylých bodech nemá smysl zkoumat.

- (h) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (y \geq 0 \wedge |x| > |y|) \vee (y \leq 0 \wedge |x| < |y|)\}$ a funkce je zde spojitá. Pro body $[x, y] \in D_f$ dostaneme, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{2} \operatorname{sign}(x) \sqrt{\frac{y}{(|x| - |y|)^3}}, \quad x \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{|x|}{2\sqrt{y(|x| - |y|)^3}}, \quad y \neq 0.$$

V bodě $[0, y]$, pro $y < 0$, f'_x neexistuje. Ve zbylých bodech nemá smysl parciální derivace zkoumat.

- (i) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq \max\{-1, -y^2\}\}$ a funkce je zde spojitá. Přímočaře získáme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{\sqrt{x+1}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x+y^2}} + \frac{\sqrt{x+y^2}}{2\sqrt{x+1}} \right), \quad x > \max\{-1, -y^2\},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{\sqrt{x+1}} \frac{y}{\sqrt{x+y^2}}, \quad x > \max\{-1, -y^2\} \vee (x = -1 \wedge |y| > 1).$$

Spočteme, že $f'_y(0, 0)$ neexistuje a parciální derivace ve zbylých bodech nemá smysl zkoumat.

Konceptuálne úlohy

Príklad 1.

Správny výrok je iba výrok (b). Derivácia v smere y (pozri na označenie osí :), nemôže existovať, lebo funkcia nie je pre $y > 4$ definovaná. O derivácii v smere x nevieme povedať nič funkcia je v smere osi x definovaná, ale v bode A nemusí byť ani spojitá, no na druhej strane kludne môže a nemusí byť kladná.

Príklad 2.

Znovu je správna odpoveď (b). Hlavným cieľom je si uvedomiť, čo vlastne gradient je a kde leží. Gradient je dvojrozmerný vektor, takže určite obrázok (c) nie je správny. Ďalej ako každý vektor vychádza z 0 takže ani obrázok (b) nie je správny, ide však o užitočnú predstavu. Nakoniec ho môžeme aj zrátať, aby sme vedeli, že obrázok (a) má naozaj správnu veľkosť. Pri rátaní si vieme pomôcť tým, že $y = 0$ a ľahko dostaneme, že (a) je naozaj dobre.